Programme de colle n°24

semaine du 8 au 12 avril

Notions vues en cours

Chapitre 26 : Dimension d'un espace vectoriel

- Cardinal d'une famille, e.v. de dimension finie, e.v. de dimension infinie
- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite, tout e.v. admet des bases, le cardinal d'une famille libre est inférieur à celui d'une famille génératrice
- Définition de la dimension d'un e.v. (de dimension finie) comme cardinal d'une base, notation $\dim E$
- Bases et dimensions d'e.v. classiques : $\{0_E\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, formule de $\dim(E \times F)$
- Si $\dim E = n$, une famille libre / génératrice de E admet au plus / au moins n éléments, et si elle a exactement n éléments, c'est une base
- Si F est un s.e.v. de E alors $\dim F \leq \dim E$, avec cas d'égalité
- Base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, concaténer une base de F avec une base de G donne une base de E
- Fragmenter une base en deux sous-familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ entraine que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et $\text{Vect}(\mathcal{G})$ sont supplémentaires ; tout s.e.v. admet un supplémentaire
- Dimension de $F \oplus G$, Formule de Grassman, caractérisations que deux s.e.v. soient supplémentaires
- E est de dimension infinie ssi il possède une famille libre avec une infinité d'éléments

Chapitre 27 : Applications linéaires (partie A)

- Application linéaire (ou morphisme d'e.v.) : définition, ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, propriétés simples ($f(0_E) = 0_F$, etc.), endo- / iso- / automorphisme
- Exemples classiques d'applications linéaires : dérivation, intégration, évaluation en un point, transposée, limite
- La combinaison linéaire / la composition / l'inverse d'application(s) linéaire(s) est une application linéaire
- Image directe et image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire sont des s.e.v., noyau et image d'un morphisme, notations $\text{Ker}\, u$ et $\text{Im}\, u$, caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité en fonction de $\text{Ker}\, u$ et $\text{Im}\, u$
- Image d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ par une application linéaire u, notation $u(\mathcal{F})$, propriété que $\text{Im}\, u = \text{Vect}(u(\mathcal{B}))$ avec $\mathcal{B}$ une base de l'ensemble de départ
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des éléments d'une base, par ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, notation multiplicative u^n, groupe linéaire $GL(E)$, formules de calcul dans un anneau

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **24 à 26**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée (cf page suivante).

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : théorèmes de la base extraite et de la base incomplète. Avec démonstration : si E est de dimension n, que peut-on dire sur les cardinaux de ses familles libres et génératrices ? Chapitre 26, Théorèmes 26.3, 26.4, 26.11
2. Sans démonstration : formule de Grassman. Avec démonstration : donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$ Chapitre 26, Propriété 26.16 et Théorème 26.18
3. La combinaison linéaire de deux applications linéaires est une application linéaire Chapitre 27, Propriété 27.4
4. L'image directe d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\operatorname{Im} f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de la surjectivité en fonction de $\operatorname{Im} f$ Chapitre 27, Propriété 27.8 (1er point), Définition 27.9 (2nde partie), Théorème 27.10 (2ème et 4ème points)
5. L'image réciproque d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\operatorname{Ker} f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de l'injectivité en fonction de $\operatorname{Ker} f$ Chapitre 27, Propriété 27.8 (2nd point), Définition 27.9 (1ère partie), Théorème 27.10 (1er et 3ème points)

Exemples de questions libres :

Chapitre 24 :

- Donner la forme générale d'un DL à l'ordre n en un point a d'une fonction f (en supposant qu'un tel DL existe).
- Si f admet un DL à l'ordre 0 en a, que peut-on déduire sur $\lim_{x \to a} f(x)$?
- Énoncer la formule de Taylor-Young (on pourra préciser les hypothèses à l'oral).
- Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$, quel DL peut-on en déduire pour une primitive F de f ?
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)^2 + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^2\big)$. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers a.

Chapitre 25 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $X \subset E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\operatorname{Vect}(X)$.
- Que peut-on dire d'une sur-famille ou d'une sous-famille pour une famille génératrice ? Pour une famille liée ? Pour une famille libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?
- Soit I un ensemble quelconque et $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$. Que signifie l'assertion "$(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle" ?

Chapitre 26 :

- Donner une base de l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur les cardinaux de ses familles libres et génératrices ? (On attend 4 propriétés)
- Soit E un e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.